

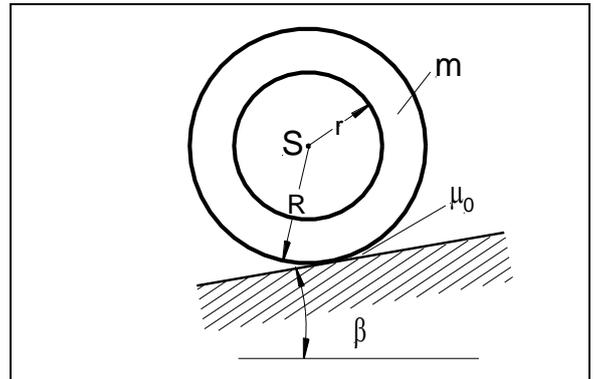
### 3. Schwerpunktsatz

**Aufgabe 3.1:** Ein Hohlzylinder der Masse  $m$  rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene herab. Die Haftreibungszahl ist  $\mu_0$ .

Man bestimme:

- die Schwerpunktsbeschleunigung des Hohlzylinders.
- die Haftreibungskraft  $F_h$ .
- die erforderliche Haftreibungszahl  $\mu_0$

Gegeben:  $m = 20 \text{ kg}$ ;  $R = 0,09 \text{ m}$ ;  $r = 0,07 \text{ m}$ ;  $\beta = 12^\circ$

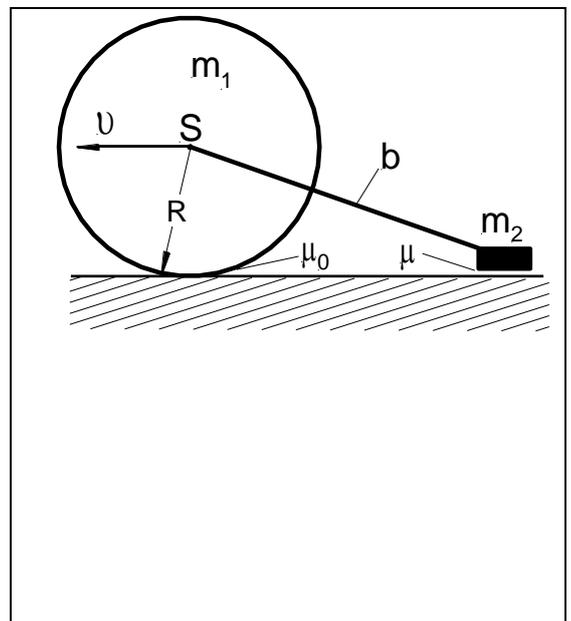


**Aufgabe 3.2:** Eine Kreisscheibe (Masse  $m_1$ , Radius  $R$ ) ist gelenkig durch einen masselosen Stab der Länge  $b$  mit einer Punktmasse  $m_2$  verbunden. Die Haftreibungszahl  $\mu_0$  zwischen der Kreisscheibe und der Straße ist genug groß, damit die Kreisscheibe nur die Rollbewegung ausführt ohne zu gleiten. Zwischen der Punktmasse und der Straße existiert die Gleitreibung (Gleitreibungszahl  $\mu$ ). Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat der Schwerpunkt der Kreisscheibe die Geschwindigkeit  $v_0$ . Zum Zeitpunkt  $t_1$  kommt das System zum Stehen.

Man bestimme:

- die Schwerpunktsbeschleunigung der Kreisscheibe.
- die Stabkraft  $F_s$ .
- den Zeitpunkt  $t_1$ .

Gegeben:  $m_1 = 200 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 30 \text{ kg}$ ;  $R = 0,5 \text{ m}$ ;  $b = 1 \text{ m}$ ;  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ ;  $\mu = \mu_0 = 0,5$ .

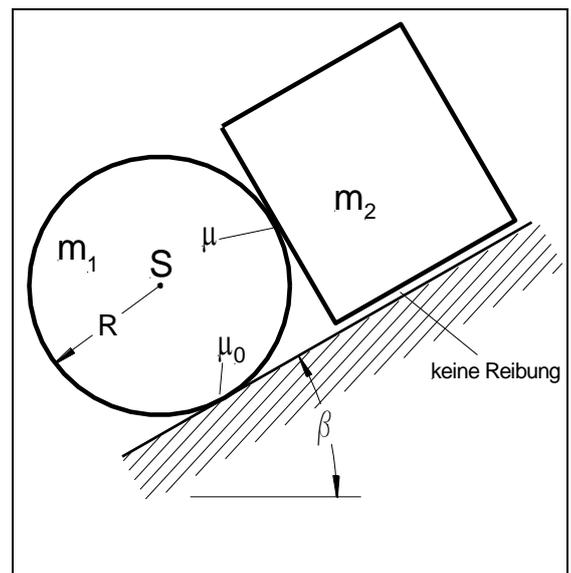


**Aufgabe 3.3:** Ein Kreiszyylinder (Masse  $m_1$ , Radius  $R$ ) rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene herab (Haftreibungszahl  $\mu_0$  ist ausreichend groß). Der Zylinder wird von einem Klotz geschoben, der reibungsfrei rutscht und ständig Kontakt mit dem Zylinder hat. An der Kontaktstelle beider Körper existiert die Gleitreibung mit der Gleitreibungszahl  $\mu$ .

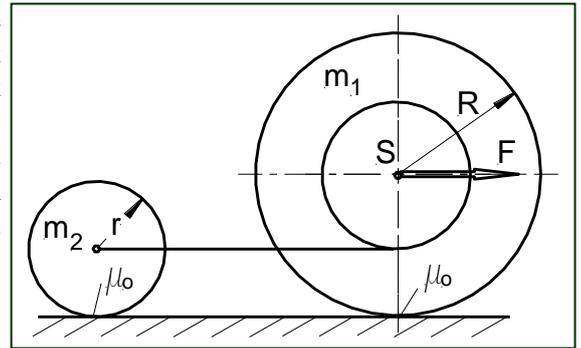
Man bestimme:

- die Schwerpunktsbeschleunigung des Kreiszyllinders.
- die für das Rollen notwendige Haftreibungszahl  $\mu_0$  zwischen Zylinder und schiefer Ebene.

Gegeben:  $m_1 = 3 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 6 \text{ kg}$ ;  $R = 0,05 \text{ m}$ ;  $\mu = 0,4$ ;  $\beta = 20^\circ$



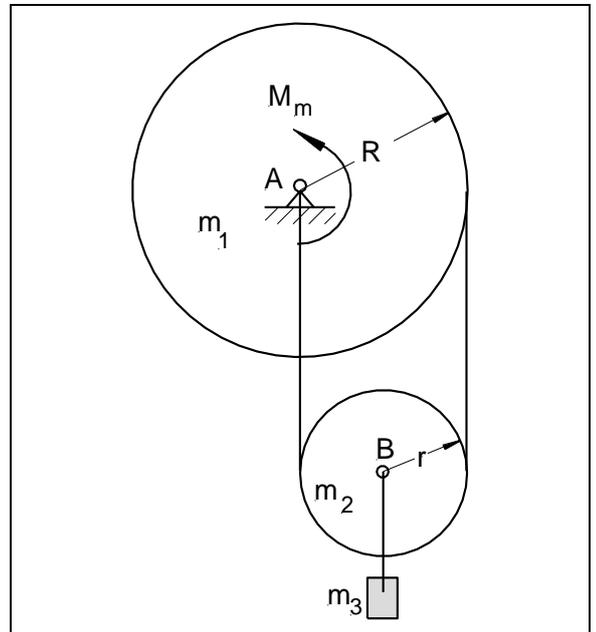
**Aufgabe 3.4:** Auf einer rauhen Ebene rollen zwei zylindrische Walzen, die durch ein masseloses Seil verbunden sind. Das Seil ist auf der Trommel der Walze 1 (Masse  $m_1$ , Massenträgheitsmoment  $J_1$ ) aufgewickelt und an der Achse der Walze 2 (Masse  $m_2$ , Massenträgheitsmoment  $J_2$ ) befestigt. Im Schwerpunkt der Walze 1 greift die Kraft  $F$  an. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen den beiden Walzen und dem Untergrund sei so groß, dass kein Rutschen auftritt.



Wie groß ist die Beschleunigung  $a_2$  des Schwerpunktes der Walze 2?

Gegeben:  $m_1 = 45 \text{ kg}$ ;  $J_1 = 2 \text{ kg m}^2$ ;  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ;  $J_2 = 0,4 \text{ kg m}^2$ ;  
 $r = 0,1 \text{ m}$ ;  $R = 0,3 \text{ m}$ ;  $F = 100 \text{ N}$

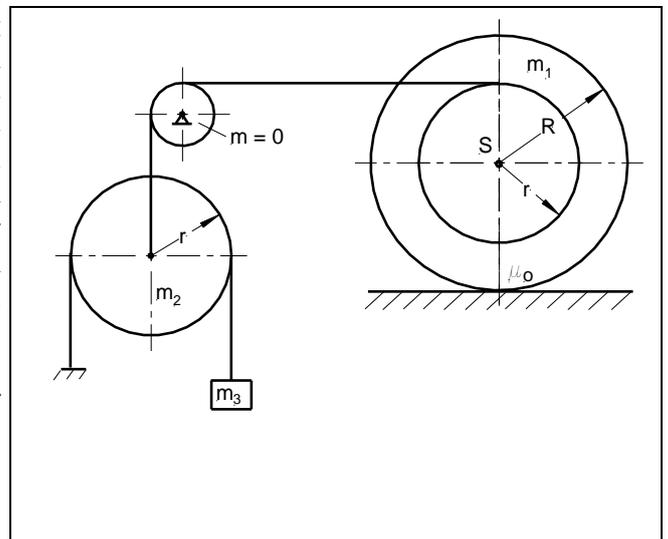
**Aufgabe 3.5:** Eine Rolle (Masse  $m_1$ , Radius  $R$ ) wird aus der Ruhelage von einem Motor mit einem Moment  $M_m$  gleichförmig angetrieben. Während der Drehbewegung wird ein Seil, das um die Rolle 2 geschlungen ist, auf die Rolle 1 aufgewickelt. Durch ein weiteres Seil wird dabei die Punktmasse  $m_3$  angehoben. Es ist bekannt, dass zum Zeitpunkt  $t_1$  die Drehzahl der Rolle 1 den Wert von  $n_1$  erreicht, und der Drehwinkel  $\varphi_1$  ist. Zu finden sind:



- der Zeitpunkt  $t_1$ .
- die Winkelbeschleunigung  $\alpha_1$  der Rolle 1.
- der Betrag des Antriebsmomentes  $M_m$ .

Gegeben:  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ;  $J_1 = 3 \text{ kg m}^2$ ;  $m_3 = 500 \text{ kg}$ ;  
 $r = 0,1 \text{ m}$ ;  $R = 0,2 \text{ m}$ ;  $n_1 = 60 \text{ min}^{-1}$ ;  $\varphi_1 = 120^\circ$

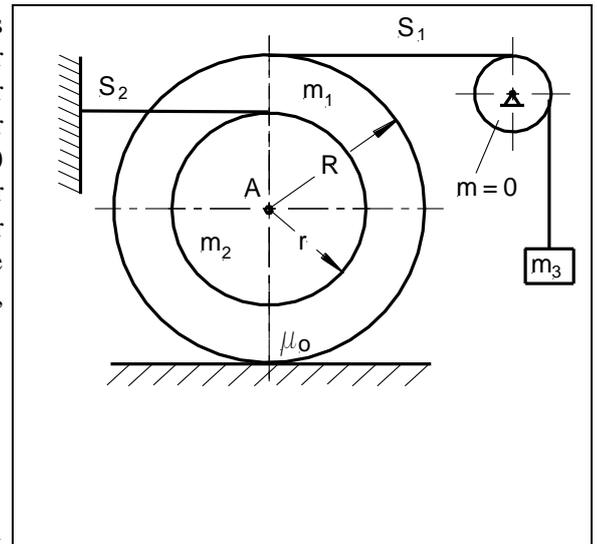
**Aufgabe 3.6:** Die nebenstehend gezeichnete Anordnung besteht aus einer Walze ( $m_1$ ,  $J_1$ ), einer masselosen Umlenkrolle, einer Kreisscheibe ( $r$ ,  $m_2$ ) sowie einer Masse  $m_3$ . Die Masse  $m_3$  hängt an einem Seil, das über die Kreisscheibe geführt wird und am anderen Ende fest befestigt ist. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe ist wie skizziert durch ein anderes Seil mit der Walze verbunden. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen der Walze und dem Untergrund sei so groß, dass an dieser Stelle kein Rutschen auftritt.



Wie groß ist die Beschleunigung  $a_S$  des Schwerpunktes der Walze ?

Gegeben:  $m_1 = 20 \text{ kg}$ ;  $J_1 = 6 \text{ kg m}^2$ ;  $m_2 = 8 \text{ kg}$ ;  $m_3 = 15 \text{ kg}$ ;  
 $r = 0,3 \text{ m}$ ;  $R = 0,6 \text{ m}$

**Aufgabe 3.7:** Die nebenstehend gezeichnete Anordnung besteht aus zwei Kreisscheiben, einer masselosen Umlenkrolle, sowie einer Punktmasse  $m_3$ . Die Kreisscheiben 1 und 2 sitzen auf der gemeinsamen Achse A und können sich unabhängig voneinander (auch gegenseitig!) drehen. Die Scheibe 1 (Masse  $m_1$ , Radius  $R$ ) rollt auf einer horizontalen Ebene und ist über ein Seil  $S_1$  mit der Masse  $m_3$  verbunden. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen der Scheibe 1 und dem Untergrund sei so groß, dass an dieser Stelle kein Rutschen auftritt. Das um die Kreisscheibe 2 (Masse  $m_2$ , Radius  $r$ ) geschlungene Seil  $S_2$  ist an der Wand befestigt.



Bestimmen Sie:

- die Beschleunigung  $a_A$  der gemeinsamen Achse A?
- die Seilkraft  $S_2$

Gegeben:  $m_1 = 20$  kg;  $m_2 = 5$  kg;  $m_3 = 10$  kg;  $R = 0,2$  m;  $r = 0,1$  m

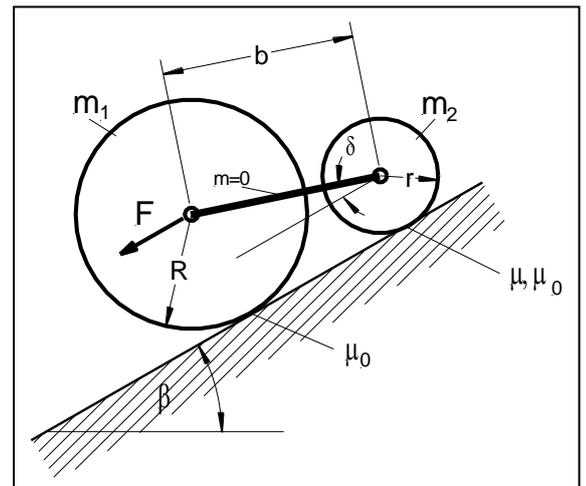
**Aufgabe 3.8:** Zwei Walzen (homogene Zylinder mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) sind durch einen masselosen Stab miteinander verbunden (s. Skizze). Der Stab ist im Mittelpunkt der Walzen drehbar gelagert.

- Wie groß ist die Beschleunigung der Walzen, wenn  $\mu_0$  groß genug ist, dass beide Walzen rollen (und nicht rutschen)?
- Wie groß ist die Stabkraft  $F_S$ ?

Bei einer Zugkraft im Verbindungsstab  $F_S^* = 40$  N rutscht die hintere (kleine) Walze (Gleitreibungskoeffizient  $\mu = 0,2$ ).

- Wie groß sind in diesem Fall für die hintere Walze die Beschleunigung des Schwerpunktes und die Winkelbeschleunigung?

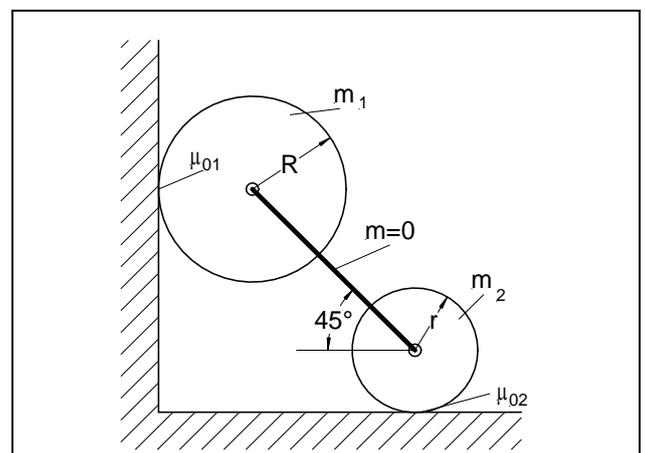
Gegeben:  $m_1 = 16$  kg;  $m_2 = 4$  kg;  $R = 0,6$  m;  $r = 0,3$  m;  $b = 1$  m,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\mu = 0,2$ ;  $F = 100$  N



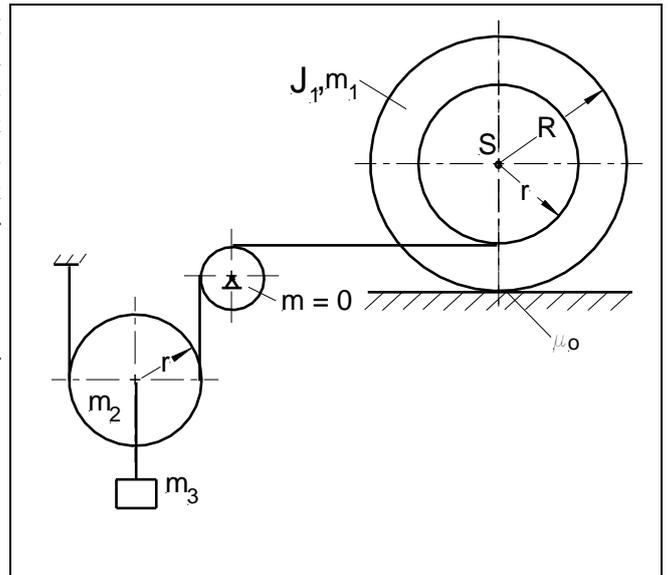
**Aufgabe 3.9:** Zwei Walzen (Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) sind durch einen masselosen Stab miteinander verbunden (s. Skizze). Die Walzen sind auf dem Stab drehbar gelagert.

- Wie groß ist die Winkelbeschleunigung der unteren Walze, wenn  $\mu_{01}$  und  $\mu_{02}$  groß genug sind, damit die Walzen rollen und nicht rutschen?
- Wie groß muss  $\mu_{02}$  (Haftreibungskoeffizient der unteren Walze) wenigstens sein, damit die Walze nicht rutscht?

Gegeben:  $m_1 = 6$  kg;  $m_2 = 4$  kg;  $R = 0,3$  m;  $r = 0,2$  m;



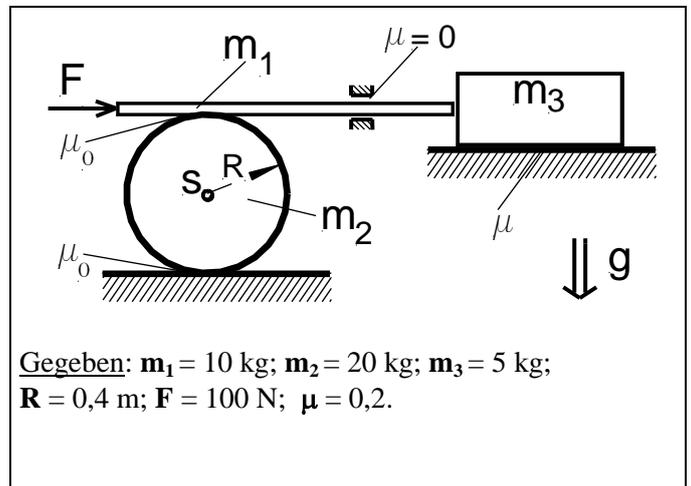
**Aufgabe 3.10:** Die nebenstehend gezeichnete Anordnung besteht aus einer Walze ( $m_1, J_1$ ), einer masselosen Umlenkrolle, einer Kreisscheibe ( $r, m_2$ ) sowie einer Masse  $m_3$ . Die Masse  $m_3$  hängt an einem Seil, das im Schwerpunkt der Scheibe 2 befestigt ist. Ein anderes Seil wird über die Kreisscheibe 2 geführt und auf der Walze wie skizziert aufgewickelt. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen der Walze und dem Untergrund sei so groß, dass an dieser Stelle kein Rutschen auftritt.



Wie groß ist die Beschleunigung  $a_s$  des Schwerpunktes der Walze?

Gegeben:  $m_1 = 20 \text{ kg}$ ;  $J_1 = 6 \text{ kg m}^2$ ;  $m_2 = 10 \text{ kg}$ ;  $m_3 = 20 \text{ kg}$ ;  $r = 0,4 \text{ m}$ ;  $R = 0,6 \text{ m}$

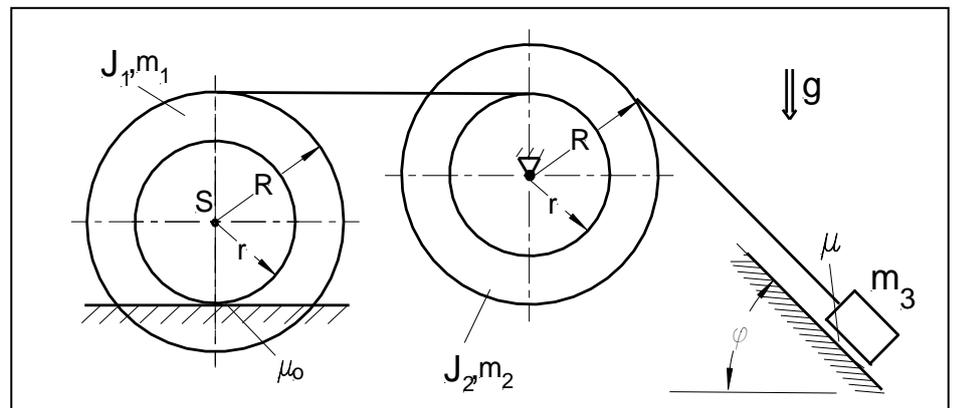
**Aufgabe 3.11:** Die nebenstehend gezeichnete Anordnung besteht aus einem Stab (Masse  $m_1$ ), einer Kreisscheibe (Masse  $m_2$ , Radius  $R$ ) sowie einer Masse  $m_3$ . Der Stab wird durch die an ihm angreifende Kraft  $F$  in Bewegung versetzt, die Bewegung des Stabes erfolgt in einer Führung reibungsfrei. Der Stab versetzt die Masse  $m_3$  in Bewegung, sie wird durch die Reibung (Reibungskoeffizient  $\mu$ ) gebremst. Durch ausreichende Haftreibung zwischen Stab und Kreisscheibe (kein Schlupf) wird die Kreisscheibe mitbeschleunigt. Zwischen Kreisscheibe und Unterlage tritt kein Rutschen auf.



Gegeben:  $m_1 = 10 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 20 \text{ kg}$ ;  $m_3 = 5 \text{ kg}$ ;  $R = 0,4 \text{ m}$ ;  $F = 100 \text{ N}$ ;  $\mu = 0,2$ .

Wie groß ist die Beschleunigung  $a_s$  des Schwerpunktes der Kreisscheibe?

**Aufgabe 3.12:** Die nebenstehend gezeichnete Anordnung besteht aus zwei Walzen, die miteinander wie skizziert durch ein Seil verbunden sind. Über die Walze 2 ( $m_2, J_2$ ) ist ein weiteres Seil geschlungen, an ihm hängt die Masse  $m_3$ . Durch diese Masse wird das System aus der Ruhelage in Bewegung versetzt, dabei dreht sich die Walze 2 um einen festen Punkt, die Walze 1 ( $m_1, J_1$ ) rollt auf einer horizontalen Ebene. Der Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen Walze 1 und Untergrund sei ausreichend groß. Die Gleitreibungszahl zwischen Masse  $m_3$  und Untergrund ist  $\mu$ .



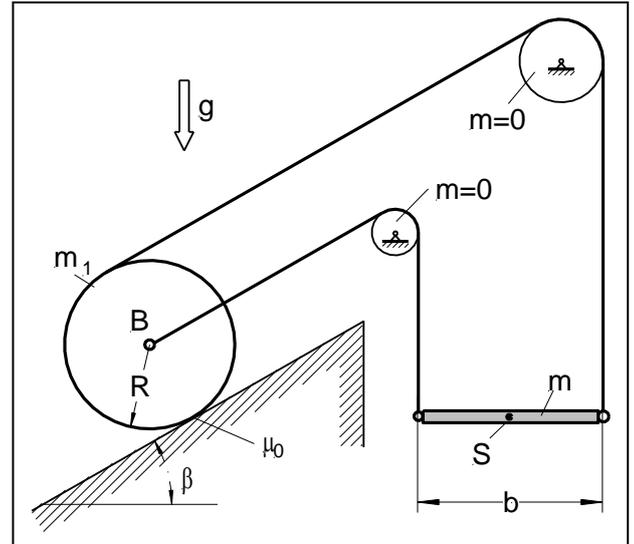
Wie groß ist die Beschleunigung  $a_s$  des Mittelpunktes der Walze 1?

Gegeben:  $m_1 = 40 \text{ kg}$ ;  $J_1 = 6 \text{ kg m}^2$ ;  $m_2 = 10 \text{ kg}$ ;  $J_2 = 1,2 \text{ kg m}^2$ ;  $m_3 = 100 \text{ kg}$ ;  $r = 0,2 \text{ m}$ ;  $R = 0,4 \text{ m}$ ;  $\varphi = 60^\circ$ ;  $\mu = 0,2$ .

**Aufgabe 3.13:** Ein Balken der Masse  $m$  hängt, wie skizziert, an zwei Seilen. Das linke Seil ist im Mittelpunkt der Walze  $m_1$  (Radius  $R$ ) befestigt, das rechte Seil ist auf der Walze  $m_1$  aufgerollt. Die Umlenkrollen sollen masselos sein. Die Haftreibung  $\mu_0$  sei ausreichend groß, so dass die Walze  $m_1$  rollt ohne zu rutschen.

Wie groß ist für die gezeichnete Lage die Beschleunigung  $a_B$  des Schwerpunktes der Walze und die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  des Balkens?

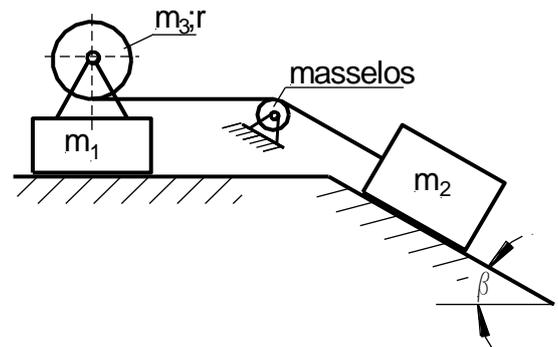
**Gegeben:**  $m_1 = 6 \text{ kg}$ ;  $m = 6 \text{ kg}$ ;  $R = 0,3 \text{ m}$ ;  $b = 0,4 \text{ m}$ ,  $\beta = 30^\circ$



**Aufgabe 3.14:** Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen bzw. schiefen Ebene. Auf der Masse **1** befindet sich eine drehbar gelagerte Kreisscheibe (Masse  $m_3$ , Radius  $r$ ). Diese ist über ein Seil mit Masse **2** verbunden.

Man bestimme die Beschleunigungen  $a_1$  und  $a_2$  der Massen  $m_1$  und  $m_2$ .

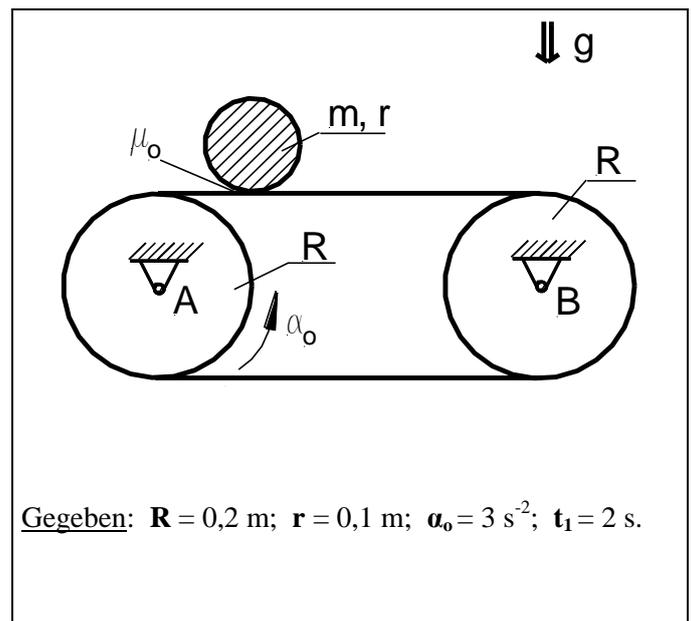
**Gegeben:**  $m_1 = m_2 = m_3 = m = 2 \text{ kg}$ ;  $r = 0,1 \text{ m}$ ,  $\beta = 30^\circ$



**Aufgabe 3.15:** Ein Förderband ist um zwei Walzen geschlungen. Die Walzen des Förderbandes werden aus der Ruhelage heraus in der Zeit  $t_1$  mit der konstanten Winkelbeschleunigung  $\alpha_0$  bis zur Enddrehzahl  $n_1$  hochgefahren. Weiterhin befindet sich auf dem Förderband die Walze **1** (Masse  $m$ , Radius  $r$ ).

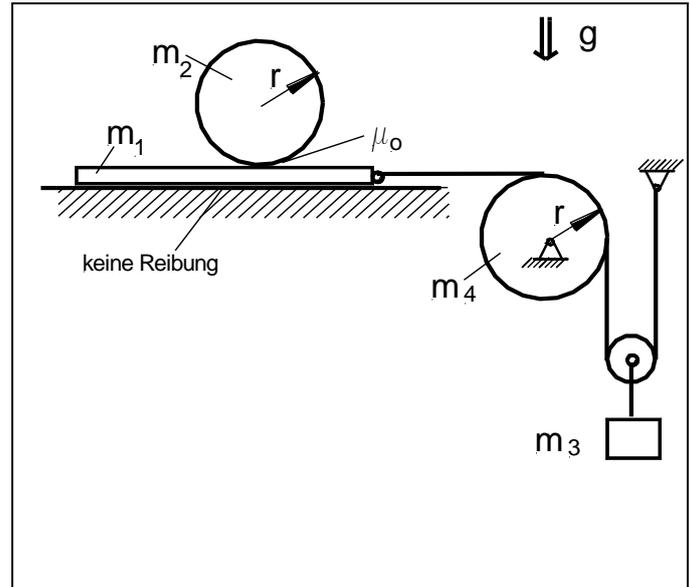
Bestimmen Sie:

1. die Schwerpunktsbeschleunigung  $a_1$  und die Winkelbeschleunigung  $\alpha_1$  der Walze **1** während des Beschleunigungsvorganges, wenn reines Rollen vorausgesetzt wird;
2. die Geschwindigkeit  $v_1$  der Walze **1** nachdem das Förderband seine Enddrehzahl erreicht hat;
3. den erforderlichen Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$  zwischen Walze **1** und Förderband.



**Gegeben:**  $R = 0,2 \text{ m}$ ;  $r = 0,1 \text{ m}$ ;  $\alpha_0 = 3 \text{ s}^{-2}$ ;  $t_1 = 2 \text{ s}$ .

**Aufgabe 3.16:** Auf einem dünnen Brett (Masse  $m_1$ ) befindet sich eine Kreisscheibe (Masse  $m_2$ , Radius  $r$ ). Am Brett ist ein Seil, das über zwei Umlenkrollen läuft, befestigt. Eine Umlenkrolle hat die Masse  $m_4$ , die zweite ist masselos. Im Mittelpunkt der masselosen Umlenkrolle ist wie skizziert eine Punktmasse  $m_3$  angebracht. Lässt man diese Masse los, setzt sich das System in Bewegung, die Kreisscheibe beginnt auf dem Brett zu rollen und erreicht nach einer bestimmten Zeit das linke Ende des Brettes. Man soll davon ausgehen, dass das Brett reibungsfrei auf der Unterlage gleitet und die Kreisscheibe auf dem Brett rollt, ohne zu gleiten.



Bestimmen Sie die Beschleunigung  $a_1$  des Brettes.

Gegeben:  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ ;  $m_3 = 10,0 \text{ kg}$ ;  
 $m_4 = 2,0 \text{ kg}$ ;  $r = 0,2 \text{ m}$ .

Aufgabe	Ergebnisse
3.1	$a_S = 1,13 \text{ m/s}^2$ ; $F_h = 18,1 \text{ N}$ ; $\mu_0 = 0,094$
3.2	$a_S = 0,353 \text{ m/s}^2$ ; $F_S = 122 \text{ N}$ ; $t_1 = 14,2 \text{ s}$
3.3	$a_S = 2,73 \text{ m/s}^2$ ; $\mu_0 = 0,192$
3.4	$a_2 = 0,451 \text{ m/s}^2$
3.5	$t_1 = 0,665 \text{ s}$ ; $\alpha_1 = 9,44 \text{ s}^{-2}$ ; $M_m = 585,6 \text{ Nm}$
3.6	$a_S = 2,81 \text{ m/s}^2$
3.7	$a_S = 2,53 \text{ m/s}^2$ ; $S_2 = 6,33 \text{ N}$
3.8	a) $a_S = 6,6 \text{ m/s}^2$ ; b) $F_S = 20,95 \text{ N}$ ; c) $a_S = 13,34 \text{ m/s}^2$ ; $\alpha = 7,33 \text{ s}^{-2}$
3.9	$\alpha_2 = 19,6 \text{ s}^{-2}$ ; $\mu_{02} = 0,125$
3.10	$a_S = 1,3 \text{ m/s}^2$
3.11	$a_S = 2,0 \text{ m/s}^2$
3.12	$a_S = 1,11 \text{ m/s}^2$
3.13	$a_B = 2,56 \text{ m/s}^2$ ; $\alpha = 6,4 \text{ s}^{-2}$
3.14	$a_1 = 0,7 \text{ m/s}^2$ ; $a_2 = 3,5 \text{ m/s}^2$
3.15	$a_1 = 0,4 \text{ m/s}^2$ ; $\alpha_1 = 4 \text{ s}^{-2}$ ; $v_1 = 0,4 \text{ m/s}$ ; $\mu_0 = 0,02$
3.16	$a_1 = 12,9 \text{ m/s}^2$